2014학년도 모의논술

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

※ 아래의 제시문Ⅰ(가~라)을 읽고 물음에 답하시오.

<가>

오늘날에는 생명 공학 기술을 육종에 이용한다. 유전자 재조합 기술을 이용하여 어떤 생물체가 원래 갖고 있지 않은 유전자를 삽입함으로써 새로운 형질을 가진 생물을 만들어 낼 수 있다. 이런 방법으로 형질이 전환된 생물체를 유전자 변형 생물 (GMO)이라고 한다. 유전자 재조합 기술은 농업 분야에 널리 적용되어 다양한 형질을 가진 GMO 작물이 개발되었다.

유전자 재조합 기술은 미국의 대규모 농장에서 많이 재배되는 목화, 콩, 벼, 옥수수, 밀 등에 주로 적용되었다. 초기에는 대량으로 살포되는 제초제나 해충에 저항력을 갖도록 만든 작물이 개발되었으나 최근에는 의약품을 생산하거나 특정한 영양 성분을 강화하여 작물의 품질을 향상시키는 등 작물의 기능을 향상시키는 쪽으로 개발 방향이 변하고 있다. 혈전용해제를 생산하는 알팔파, 항산화제인 안토시아닌을 생산하는 담배, 베타카로틴을 함유하는 황금 쌀, 사람의 초유 성분이 함유된 우유를 생산하는 젖소 등이 대표적인 예이다.

초기에 개발된 GMO 식품 중에는 알레르기를 유발할 가능성 때문에 폐기된 콩이 있었다. 또한, 사료용으로 허가된 해충 저항성 옥수수의 일부가 식용으로 사용되었기 때문에 개발 회사가 스스로 품종 등록을 철회하기도 했다. 이처럼 최근에는 GMO 식품 개발 과정에서 개발 기관 스스로 여러 단계에 걸친 안전성 평가를 하며, 개발 후 재배 승인을 받기 위해 해당 국가의 전문 기관으로부터 식품 안전성 평가와 환경 안전성 평가를 받는다.

-고등학교 과학, 더텍스트 p325~328에서 발췌 수정-

<나>

사료용 등으로 수입한 유전자변형작물(GMO, LMO)이 유통 과정에서 자연으로 유출, 자생하는 사고가 정부 조사에서만 3년간 40여건이 확인됐다. 국립환경과학원은 2일 2009~2011년에 항만, 사료공장, 운송로 등 GMO 유출 우려가 있는 주변 505개 지점을 조사한 결과 자생하고 있는 GMO 식물 44건과 관련 유전자를 전국적으로 확인했다고 'LMO 자연환경모니터링 및 사후관리 연구' 보고서에서 밝혔다. 유전자 검사까지 거쳐 GMO 생태계 유출 사고를 최종 확인한 정부 보고서는 처음이다. 연구진은 경작지가 아닌 항만, 사료공장, 가공공장, 축산농가, 축제지, 운송로 주변 등 종자 낱알이 유출되기 쉬운 구역에서 자라고 있는 콩, 옥수수, 유채, 면화가 있는지 조사했다. 이들 4개 작물은 국내에 많이 수입되는 GMO 작물이다. 연구진은 2009년과 2010년에 GMO로 의심되는 작물 각각 127건과 228건을 발견했고 작년에는 조사 방식을 확대해 407건을 찾아냈다. GMO 작물의 자연계 유출 사고는 전국적으로 발생했다. 발견 장소는 사료공장 주변과 도로변이 많아 유통 중에 낙곡 형태로 유출된 것으로 추정된다.

환경과학원은 "확인된 GMO 작물은 사료공장 종사자가 재배한 1건 외에는 대부분 단독으로 자라고 있는 형태였다."면서 "군락을 이루는 경우는 없었다."고 설명했다. 연구진이 유채꽃 단지(축제지)에서 발견한 유출 의심 사례 65건 가운데 1차 단백질 검사에서 GMO로 추정되는 작물이 23건이나 나와 유채꽃 축제장에서 유출됐을 가능성도 제기됐다. 환경과학원 관계자는 "축제용으로 유전자 변형 유채를 파종하고 행사 후 뒤엎는 과정에서 유출된 것 같다"고 말했다.

우리나라는 연구·시험용으로만 GMO를 키울 뿐 상업 용도로 재배하지는 않고 있다. 환경운동연합 최준호 정책실장은 "GMO를 경작하지 않는데도 이번 연구 사업에서 드러난 유출 실태는 농민과 소비자를 불안하게 하기에 충분하다"며 '구분유통' 관리 실태를 강화해야 한다."고 말했다. 최 실장은 또 "지역축제를 위해 GMO 유채를 불법으로 파종했다면 이는 심각한 사안"이라며 "GMO 유채임이 최종 확인되면 경위 조사에 나서야 한다."고 촉구했다.

-한국일보 2012년 12월 2일자 기사 'GMO 작물 유통 중 유출, 자생… 3년간 44건 확인'에서 발췌-

<다>

농경이 시작된 이래 인류는 식량을 전적으로 토지에서 얻어 왔으며, 식물을 잘 자라게 하기 위해서는 질소 성분을 토지에 공급해야 한다는 사실을 알았다. 그리고 식량 생산을 늘리기 위해서 동물의 분뇨를 퇴비로 사용하여 왔다. 그러나 인구의 증가에 비하여 식량의 증산은 크게 미치지 못하므로 획기적인 식량 증산 대책이 필요하게 되었다.

하버에 의해 개발된 암모니아의 합성 방법은 인공적으로 질소 비료를 생산할 수 있게 하였고, 인류의 식량 문제를 개선하는 데 결정적인 공헌을 하였다. 암모니아는 질소 비료의 원료로서 인, 칼륨과 함께 식물의 3대 비료중의 하나이기 때문이다. 하버는 공기 중의 질소 기체와 수소 기체를 촉매와 함께 반응시켜 암모니아를 합성해 내었으며, 그 후 보슈와 함께 하버-보슈법을 개발하여 암모니아를 대량 생산하였다. 현재는 암모니아를 원료로 황산암모늄, 요소, 복합 비료 등을 생산하여 식량 증산에 이바지하고 있다.

-고등학교 화학I, 교학사, p16~17에서 발췌 -

2014학년도 모의논술

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

<라>

화학반응의 평형 이동에 대한 농도의 영향은 평형 상수(K)로 설명할 수 있다. 일정한 온도에서 평형 상수는 농도에 관계없이 일정하다. 따라서 반응물이나 생성물의 농도가 변하여 새로운 평형에 도달해도 평형 상수는 변하지 않는다.

수소(H_2), 아이오딘(I_2), 아이오딘화 수소(HI)가 반응 평형 상태에 있을 때 평형 상수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_2\,(g) + I_2\,(g) \rightleftharpoons 2HI\,(g)$$

$$K = \frac{[HI]^2}{[H_2][I_2]}$$

같은 온도에서 이 평형 상태에 H_2를 첨가하면 분모에 있는 $[H_2]$가 증가하므로 반응 지수 (Q)는 평형상수 (K) 보다 작아진다.

$$Q = \frac{[HI]_t^2}{[H_2]_t[I_2]_t} < K$$

위식에서 Q 와 K가 같아지려면 (즉, 반응이 다시 평형에 도달하려면) $[H_2]$와 $[I_2]$는 작아지고, [HI] 는 커져야 하므로 정반응 쪽으로 반응이 진행되어 새로운 평형에 도달한다. 반대로 H_2를 제거하면 $Q > K$ 이 되므로 Q와 K가 같아지기 위해서는 역반응 쪽으로 반응이 진행되어 새로운 평형에 도달한다.

-고등학교 화학II, 비상교육, p136에서 발췌-

【문제1】

<가>와 <나>를 읽고 유전자 변형 생물의 장점과 문제점을 서술하고, 그 문제점을 해결하기 위한 대책에는 어떤 것들이 있는지 제시하라.

【문제2】

<다>에 제시된 하버-보슈의 암모니아 생산 공정은 수소와 질소 기체로부터 암모니아를 합성하는 아래의 반응을 이용한다.

$$N_2\,(g) + 3H_2\,(g) \rightleftharpoons 2NH_3\,(g)$$

암모니아 비료를 만들기 위해 위의 반응을 수행한 결과 다음과 같은 농도에서 반응 평형에 도달하였음을 확인하였다.

$[H_2]$ = 1.2 M, $[N_2]$ = 0.40 M, $[NH_3]$ = 0.20 M

만일 여기에 1.000 mol/L 의 N_2가 갑자기 가해지면 반응 평형은 어느 쪽으로 이동하겠는가? <라>에서 제시된 설명을 읽고 K와 Q를 계산하고, 이 값들을 이용하여 평형 이동을 예측하라.

2014학년도 모의논술

자연계열 논술문제

지원학과 :	수험번호 :	성명 :

※ 아래의 제시문Ⅱ(가~다)을 읽고 물음에 답하시오.

<가>

삼각법은 삼각형의 변과 각 사이의 관계를 바탕으로 여러 가지 기하학적인 도형을 연구하는 분야이다. 고대로부터 항해술, 천문학, 토지 측량 등의 필요에 의하여 오랫동안 연구된 삼각법은 그리스의 천문학자 히파르코스를 중심으로 발전하다가 아라비아와 인도로 전해졌다. 그 이후에 삼각법은 15세기에 유럽으로 전해지면서 레기오몬타누스에 의하여 체계적인 지식체계로 정립되어 발전하게 되었다. 비에타에 의하여 삼각함수에 대한 여러 공식이 기호화되었으며, 뉴턴은 원운동을 이용하여 삼각법을 일반각으로 확장하였다. 삼각법에서 발전된 삼각함수는 현대 수학의 발달과 자연과학 연구에 크게 기여하였으며 오늘날 통신신호와 라디오의 주파수 조정, 전자레인지와 자기 공명 단층 촬영기 개발 등에 널리 활용되고 있다.

-고등학교 수학II, 두산동아 p.44-

<나>

일반적으로 좌표평면에서 직선의 방정식은 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타낼 수 있다. 역으로 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$은

$$\begin{cases} b \neq 0\text{일 때}, & y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} \\ b=0, a \neq 0\text{일 때}, & x=-\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

이므로 일차방정식 $ax+by+c=0$은 직선의 방정식이다.

좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

중심이 $\mathrm{C}(a, b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$이다. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$이다. 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이 된다. 또한 원 밖의 한 점에서 주어진 원에 그린 접선의 길이는 같다.

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 ℓ, 넓이를 S라고 하면 $\ell=r\theta$, $\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}r\ell$이 성립한다.

삼각함수의 덧셈정리는 다음과 같다.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

-중학교 수학3, VIII. 원의 성질(천재교육) 및 고등학교 수학, V.도형의 방정식과 VII.삼각함수(좋은책 신사고)에서 발췌-

<다>

미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는 $f'(x)=\lim\limits_{\triangle x \to 0}\dfrac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$로 정의된다.

미분 가능한 두 함수 $y=f(z)$, $z=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

로 주어진다.

x의 함수 y가 음함수 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다. 또한 미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하고 미분가능할 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$로 주어진다. 이를 역함수 미분법이라 한다. 삼각함수의 미분을 살펴보면 $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=\sec^2(x)$가 성립한다.

-고등학교 수학II, IV. 미분법(좋은책 신사고) 발췌-

2014학년도 모의논술

자연계열 논술문제

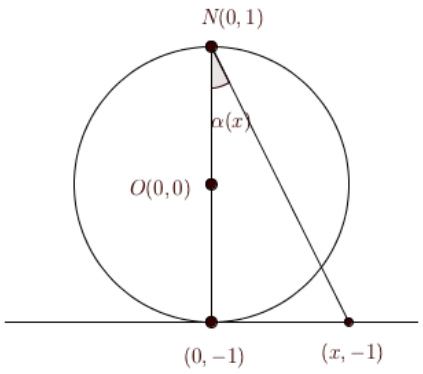
지원학과 :	수험번호 :	성명 :

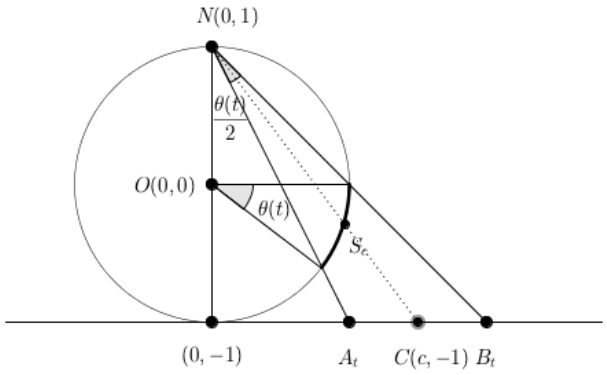
【문제3】

$v^2+w^2=1$을 만족하는 벡터 $V=(v,w)$에 수직인 직선 중 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,0)$으로 부터의 거리가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식을 모두 다 구하고, 이 직선들과 직선 $y=-1$의 교점의 좌표를 구하시오.

【문제4】

직선 $y=-1$ 위의 두 점 $A_t(t-\frac{2}{\sqrt{3}},-1)$과 $B_t(t+\frac{2}{\sqrt{3}},-1)$을 연결한 선분 위의 점 $C(c,-1)$을 택하자. 그리고 두 점 $C(c,-1)$과 $N(0,1)$을 연결한 선분과 원 $x^2+y^2=1$과의 교점 중 $N(0,1)$이 아닌 점을 S_c라 하자. 그러면 $\left\{S_c \mid t-\frac{2}{\sqrt{3}} \le c \le t+\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$는 원 $x^2+y^2=1$의 호가 된다. 이 호의 중심각의 크기를 $\theta(t)$라 할 때, $\tan\theta(t)$를 t에 관한 유리식으로 나타내고 t가 모든 실수에서 움직일 때 $\theta(t)$의 최대값을 구하시오. 그리고 $\lim_{t\to\infty}\theta(t)=0$이 됨을 보이시오.

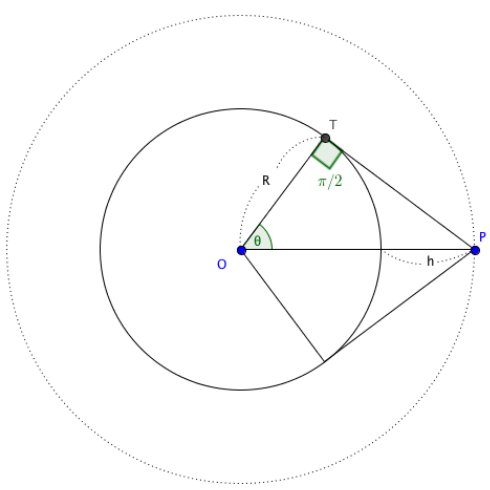




【문제5】

인공위성은 제작하고 발사 및 유지하는데 매우 큰 비용이 들어가지만 통신 및 정보 수집을 위해 필수적인 장비이다. 따라서 가장 적은 수의 인공위성을 운영하면서 음영지역이 없도록 하는 것은 매우 중요한 문제이다. 이러한 문제를 다음과 같이 단순화 하여보자.

구면을 다루는 대신 중심이 O이고 반지름이 R인 원을 관측해야 될 대상으로 생각하자. 그리고 이 원의 외부에 놓여 있으면서 원으로부터 거리가 h인 점 P에 인공위성이 놓여 있다고 생각하자. 이 점 P에서 주어진 원에 그린 접선과 원과의 교점을 T라 하고 $\measuredangle TOP=\theta$라디안이라 할 때, 주어진 원 전체를 관측하기위하여 원으로부터 거리가 h인 궤도위에 필요한 인공위성의 최소개수 n을 구하시오. 그리고 이 함수관계를 x축은 $\angle TOP=\theta$라디안, y축은 필요한 인공위성 개수 n으로 하는 그래프로 나타내고, 이로부터 n개의 인공위성이 가장 효율적으로 배치되는 인공위성의 고도 h를 인공위성 개수 n에 대한 함수로 나타내시오.



자연계 논술
출제의도 및 문제해설

출제의도

[제시문1]은 과학기술이 식량 자원의 양과 질의 향상에 기여한 가장 대표적인 사례인 유전자변형생물과 비료에 대한 것으로, 문제1의 경우 특히 최근에 논란이 되고 있는 유전자변형생물의 장점과 문제점은 무엇인지 과학적인 근거를 바탕으로 이해하고, 이에 대한 해결방안은 어떤 것 들이 있을 수 있는지 제시된 다양한 지문들을 통해 추론하는 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 문제2의 경우 비료의 제조공정에서 쓰이는 화학평형의 원리를 이해하고 이를 통해 제조공정의 수율을 향상시키기 위해 고려되어야 할 점을 평형상수 및 반응지수의 계산을 통해 설명할 수 있는가를 평가하고자 하였다.

[제시문2]는 수학적 사고능력을 파악하고 중등 교육을 통하여 숙지한 수학적 개념을 활용할 수 있는 능력의 파악에 중점을 두었다. 평면위에 놓인 원과 직선이라는 단순한 기하학적 대상에 대한 질문에서 시작하여 주어진 성질을 만족하는 직선의 방정식을 구하는 문제, 두 직선의 교점을 구하는 문제, 그리고 원의 성질에 대한 응용 및 최대값과 극한을 구하는 문제를 출제하였다. 마지막으로 이러한 수학적 개념을 우리가 자주 접하는 문제에 적용시키는 법에 대하여 다루었고, 특히 실제 생활에서 자주 접하게 되는 현상에 대한 함수를 구체적으로 정의하고 해당 함수의 그래프를 그리는 방법의 숙지 여부를 확인하는데 중점을 두었다.

문제해설

[문제 1 풀이]

[제시문 1]의 지문에서 제시된 예시들을 통해 유전자변형생물의 장점과 문제점을 자신의 생각을 바탕으로 정리하고, 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 가능한 대안에는 어떤 것들이 있는지 제시할 수 있어야 한다. <u>자신의 생각을 서술하지 않고 본문을 그대로 요약하거나 논술의 형식이 결여된 단답형 답안은 감점의 요인이 된다.</u>

제초제나 해충에 저항력을 갖는 GMO의 경우 비료나 농약의 사용을 줄이면서 <u>생산성을 극대화</u>시킬 수 있고, 영양 성분을 강화시킨 GMO의 경우 소비자의 <u>건강 증진에 기여</u>할 수 있다는 장점이 있다. 또한 의약품을 생산하는 GMO의 경우 싼값에 의약품을 대량생산할 수 있다는 점에서 <u>경제적 효용가치</u>가 크다고 할 수 있다. 뿐만아니라 원래 작물이나 가축이 갖고 있지 않은 새로운 형질의 품종을 얻을 수 있기 때문에 생태계의 <u>유전적 다양성을 유지</u>하는데 기여할 수 있다.

반면에 GMO가 만들어내는 단백질들이 사람에 <u>알레르기 반응이나 항생제 내성</u> 등을 유발할 가능성이 있으며, 특히 가장 큰 문제는 <u>GMO들이 유통과정에서 유출되어 자생하거나 자연교배</u>하는 경우이다. 예를 들어 의약품을 생산하는 GMO가 자연 유출되어 일반농산물과 혼합 경작 될 경우 심각한 <u>식품안전성 문제를 초래</u>할 수 있으며, 해충에 저항력을 갖는 GMO의 경우 슈퍼잡초나 슈퍼해충과 같은 의도하지 않은 유전적 변이를 발생시켜 <u>생태계를 교란</u>시킬 수도 있다는 점이다.

따라서 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서는 먼저 철저한 <u>식품 안전성 평가와 환경 안전성 평가를 통</u>

해 선별된 농산물만 재배 유통되어야 할 것이다. 또한 재배지나 유통과정에서 GMO가 자연 유출되지 않도록 보다 효율적이고 엄격한 추적 관리가 이루어져야 한다. 뿐만 아니라 정부에서는 소비자들이 가질 수 있는 근거 없는 불안감을 해소시키기 위해서 안전성 평가를 통과한 농산물들에 대해서 GMO 표시제 등을 실시해야 할 것이다.

[문제2 풀이]

암모니아 생산 공정의 반응 평형상수는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$K = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3}$$

여기에 반응 평형에 도달했을 때의 각 화합물의 농도 값을 대입하면 평형상수 K값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} = \frac{(0.2)^2}{(0.4)x(1.2)^3} = 0.058$$

만일 평형상태에서 1M의 N_2가 갑자기 가해지면 평형은 이동하게 되고 이때의 이동방향은 반응지수 Q를 구함으로써 알 수 있다.

$$Q = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} = \frac{(0.2)^2}{(1.4)x(1.2)^3} = 0.017 \quad < K\,(=0.058)$$

따라서 반응이 다시 평형에 도달하려면 $[N_2]$와 $[H_2]$는 작아지고, $[NH_3]$ 는 커져야 하므로 정반응 쪽으로 반응이 진행되어 새로운 평형에 도달한다.

[문제 3] $v^2+w^2=1$을 만족하는 벡터 $V=(v,w)$에 수직인 직선 중 원 $x^2+y^2=1$의 중심 $(0,0)$으로부터의 거리가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식을 모두 다 구하고, 이 직선들과 직선 $y=-1$의 교점의 좌표를 구하시오.

[풀이] $V=(v,w)$에 수직이면서 $(0,0)$으로 부터의 거리가 $\frac{1}{2}$인 직선위의 한 점을 (x_0, y_0)라 하자. 이때 직선의 방정식은

$$(v,w)\cdot(x-x_0, y-y_0) = vx+wy-(vx_0+wy_0)=0$$

을 만족한다. 이 직선과 점 $(0,0)$과의 거리는

$$\frac{|v\cdot 0+w\cdot 0-(vx_0+wy_0)|}{\sqrt{v^2+w^2}} = \frac{|vx_0+wy_0|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

이므로 $|vx_0+wy_0|=\frac{1}{2}$이 성립한다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

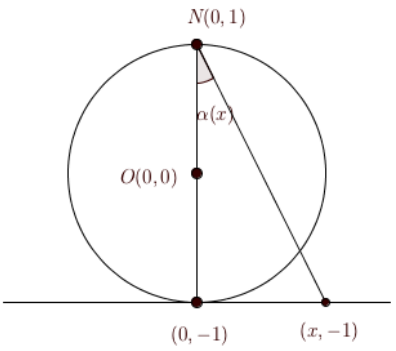
$$vx + wy = \frac{1}{2} \text{ 또는 } vx + wy = -\frac{1}{2}$$

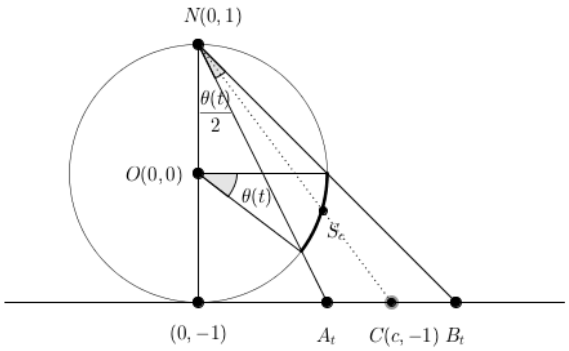
이다.

이 두 직선과 직선 $y=-1$과의 교점을 구하자. 만일 $v=0$이면 $(v, w) = (0, \pm 1)$이 되고 이 경우 직선 $y=-1$과 만나지 않는다. $v \neq 0$일 때, 위의 식에 $y=-1$을 대입하면 $vx - w = \pm\frac{1}{2}$로부터 $vx = w \pm \frac{1}{2}$이므로 $x = \frac{2w \pm 1}{2v}$이다. 따라서 두 교점의 좌표는 $(\frac{2w+1}{2v}, -1)$과 $(\frac{2w-1}{2v}, -1)$이다.

[문제 4] 직선 $y=-1$로 주어지는 직선위의 두 점 $A_t(t-\frac{2}{\sqrt{3}}, -1)$과 $B_t(t+\frac{2}{\sqrt{3}}, -1)$을 연결한 선분위의 점 $C(c, -1)$을 택하자. 그리고 두 점 $C(c, -1)$과 $N(0,1)$을 연결한 선분과 원 $x^2+y^2=1$과의 교점 중 $N(0,1)$이 아닌 점을 S_c라 하자. 그러면 $\left\{S_c \mid t-\frac{2}{\sqrt{3}} \le c \le t+\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$는 원 $x^2+y^2=1$의 호가 된다. 이 호의 중심각의 크기를 $\theta(t)$라 할 때, $\tan\theta(t)$를 t에 관한 유리식으로 나타내고 t가 모든 실수에서 움직일 때 $\theta(t)$의 최대값을 구하시오. 그리고 $\lim_{t\to\infty}\theta(t) = 0$이 됨을 보이시오.

[풀이] 다음 그림과 같이 $\tan\alpha(x) = \frac{x}{2}$가 되는 각 $\alpha(x)$를 정의하자.





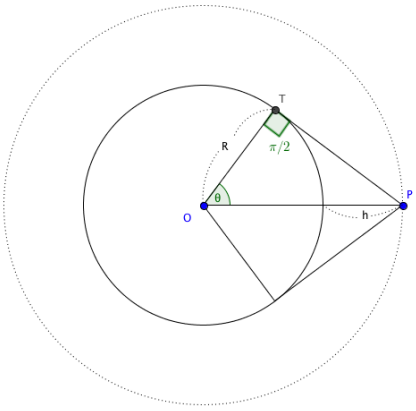
원점을 $O(0,0)$이라 하고 구하려는 호의 중심각의 크기를 $\theta(t)$라 두면 $0 < \theta(t) < \pi$이고 이 각은 구하려는 호의 원주각인 $\angle A_tNB_t$의 2배가 된다. $\frac{\theta(t)}{2} = \angle A_tNB_t = \alpha(t+\frac{2}{\sqrt{3}}) - \alpha(t-\frac{2}{\sqrt{3}})$이고 $\tan\alpha(x) = \frac{x}{2}$이므로 $\tan\frac{\theta(t)}{2} = \tan(\alpha(t+\frac{2}{\sqrt{3}}) - \alpha(t-\frac{2}{\sqrt{3}}))$과 탄젠트 함수의 덧셈공식에 의하여 $\tan\frac{\theta(t)}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3t^2+8}$이고 $\tan\theta(t) = \frac{16\sqrt{3}\,(3t^2+8)}{(3t^2+8)^2-192}$가 된다.

이제 $\theta(t)$의 최대값을 구하자. 분수함수 $\frac{8\sqrt{3}}{3t^2+8}$는 $t=0$에서 최대값 $\sqrt{3}$을 갖고 $\tan\frac{\theta(t)}{2}$는 $0 < \theta(t) < \pi$에서 연속인 증가함수이므로 $\theta(t)$는 $\tan\frac{\theta(t)}{2}$가 최대값을 갖는 $t=0$에서 최대값 $\frac{2\pi}{3}$을 갖는다.

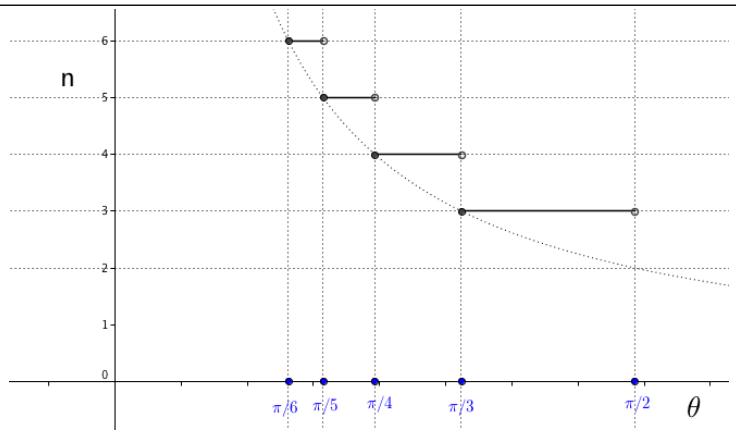
또한, $\lim_{t\to\infty} \tan\frac{\theta(t)}{2} = \lim_{t\to\infty} \frac{8\sqrt{3}}{3t^2+8} = 0$이고 $0 < \frac{\theta(t)}{2} < \frac{\pi}{2}$에서 tan함수는 연속인 단사함수이므로 $\lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0$이 된다.

[문제 5] 인공위성은 제작하고 발사 및 유지하는데 매우 큰 비용이 들어가지만 통신 및 정보 수집을 위해 필수적인 장비이다. 따라서 가장 적은 수의 인공위성을 운영하면서 음영지역이 없도록 하는 것은 매우 중요한 문제이다. 이러한 문제를 다음과 같이 단순화 하여보자.

구면을 다루는 대신 중심이 O이고 반지름이 R인 원을 관측해야 될 대상으로 생각하자. 그리고 이 원의 외부에 놓여 있으면서 원으로부터 거리가 h인 점 P에 인공위성이 놓여 있다고 생각하자. 이 점 P에서 주어진 원에 그린 접선과 원과의 교점을 T라 하고 $\measuredangle TOP = \theta$라디안이라 할 때, 주어진 원 전체를 관측하기위하여 원으로부터 거리가 h인 궤도위에 필요한 인공위성의 최소개수 n을 구하시오. 그리고 이 함수관계를 x축은 $\angle TOP = \theta$라디안, y축은 필요한 인공위성 개수 n으로 하는 그래프로 나타내고, 이로부터 n개의 인공위성이 가장 효율적으로 배치되는 인공위성의 고도 h를 인공위성 개수 n에 대한 함수로 나타내시오.



[풀이] $\measuredangle TOP = \theta$를 만족하는 점 P에 인공위성이 놓여 있다고 하면 이 인공위성은 원의 둘레길이인 $2\pi R$중 중심각이 2θ인 호의 길이인 $2\theta R$만큼을 관측할 수 있다. 따라서 전체 원을 관측하려면 $\frac{2\pi R}{2\theta R} = \frac{\pi}{\theta}$만큼의 위성이 필요하고, 위성의 개수는 자연수 값만 가질 수 있으므로, 이 궤도에 인공위성이 놓여 있다면 $\frac{\pi}{\theta}$보다 작지 않은 가장 작은 자연수 개수만큼의 인공위성이 있어야 원 전체를 관측할 수 있다. 그러므로 필요한 최소의 인공위성 개수는 $n-1 < \frac{\pi}{\theta} \le n$일 때, 즉 $\frac{\pi}{n} \le \theta < \frac{\pi}{n-1}$일 때, n개다.



n개의 인공위성이 가장 효율적으로 배치될 때는 서로 중첩이 없어야 할 때이고 이 때 $\frac{2\pi}{2\theta} = n$이다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{n}$이고 이 때 인공위성의 고도는 $\cos\theta = \frac{R}{R+h}$로부터 $h(n) = \frac{R(1-\cos\frac{\pi}{n})}{\cos\frac{\pi}{n}}$이다.